10 - Vektorräume

Vorkurs Mathematik SoSe 2022

Lukas Mürmann

Fakultät Informatik - Lehrstuhl 7 - TU Dortmund

22.03.2022

Vektorräume

Einleitung

- Heute: Kurze Wiederholung von Vektoren
  - Was sind Vektoren?
  - Was ist genau ein Vektorraum?
  - Wie rechnet man mit Vektoren?
- Starten wir mit einem Beispiel für einen einfachen Vektor.

Vektor

- Folgende Konstruktion kennt ihr sicherlich alle aus der Schule:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- Es handelt sich um einen **Vektor** (im Zahlenraum) mit 3 Komponenten.
- Die Komponenten des Vektors schreiben wir in eine Spalte.
- Manchmal nutzt man auch die folgende platzsparende Schreibweise:

$$\vec{v} = (1, 2, 3)^T$$

- Dabei steht das T für "transponiert" und deutet an, dass wir eigentlich einen Spaltenvektor meinen.

Vektorraum

- Vektoren sind stets Teil eines sogenannten Vektorrau ms V.
- Für unser Beispiel war $V = \mathbb{R}^3$
- Jedem Vektorraum liegt ein **Körper** (z.B. $\mathbb{R}$) zugrunde.
- Man spricht daher auch oft von einem K-**Vektorraum**.
- Was genau ein Körper ist, werdet ihr in Mafl erfahren.
- Genauer ist ein Vektorraum ein Zusammenschluss bzw. Tupel $(V, +, \cdot)$.
    - $+$ ist dabei eine additive Verknüpfung der Elemente von V
    - $\cdot$ ist die multiplikative Verknüpfung (Körperelemente mit Vektoren)
- Das wollen wir nun definieren.

Definition Vektorraum

Definition 10.1 Vektorraum

Für einen Körper K betrachten wir die **Vektoren**

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in V, \quad v_1, \ldots, v_n \in K$$

sowie die wie folgt definierte komponentenweise Addition von Vektoren und die Multiplikation mit Skalaren (Elementen aus K).
Für $\vec{v}, \vec{u} \in V, t \in K$ wird definiert:

$$\vec{v} + \vec{u} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} v_1 + u_1 \\ \vdots \\ v_n + u_n \end{pmatrix} \text{ und } t \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} t \cdot v_1 \\ \vdots \\ t \cdot v_n \end{pmatrix} \in V$$

Die Elemente aus V bilden dann mit den Verknüpfungen $(+, \cdot)$ einen K-**Vektorraum** genau dann, wenn die sogenannten **Vektorraumaxiome** erfüllt sind.

Beispiele für einfache Vektorrechnung

- Die Verknüpfungen, die ihr gerade in der Definition gesehen habt, waren die bekannte Vektoraddition und die Multiplikation von Vektoren mit Skalaren:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 \\ 2+2 \\ 3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 1 \\ 5 \cdot 2 \\ 5 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}$$

- Schauen wir uns nun diese sog. Vektorraumaxiome an.
- Dabei handelt es sich einfach um Rechenregeln, die für einen Vektorraum gelten müssen.

Definition Vektorraumaxiome Teil 1

Definition 10.1 Fortsetzung (Vektorraumaxiome)

$(V, +, \cdot)$ also die Menge V zusammen mit den zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ heißt ein **(K-)Vektorraum** genau dann, wenn die folgenden **Vektorraumaxiome** erfüllt sind:

V.1 $u + v = v + u \quad \forall u, v \in V$ (Kommutativgesetz der Addition)

V.2 $(u + v) + w = u + (v + w) \quad \forall u, v, w \in V$ (Assoziativgesetz der Addition)

V.3 $\exists 0 \in V$ mit $v + 0 = 0 + v = v \quad \forall v \in V$ (Neutrales Element der Addition)

V.4 Zu jedem $v \in V$ existiert genau ein $-v$ mit $v + (-v) = (-v) + v = 0$ (Inverses Element der Addition)

$\vdots$

Definition Vektorraumaxiome Teil 2

Definition 10.1 Fortsetzung (Vektorraumaxiome)

$$\vdots$$

V.5 $1 \cdot v = v \quad \forall v \in V$

V.6 $t \cdot (z \cdot v) = (t \cdot z) \cdot v, \quad \forall t, z \in K, v \in V$ (Assoziativgesetz der skalaren Multipl.)

V.7 $t \cdot (u + v) = t \cdot u + t \cdot v, \quad \forall t \in K, u, v \in V$ (Distributivgesetz I)

V.8 $(t + z) \cdot v = t \cdot v + z \cdot v \quad \forall t, z \in K, v \in V$ (Distributivgesetz II)

- **Wichtig:** Man kann Addition und Skalarmultiplikation auch ganz anders als z.B. im $\mathbb{R}^2$ definieren.
- Solange die Vektorraumaxiome gelten, handelt es sich stets um einen Vektorraum.

Weiteres zu Definition 10.1

- Die Elemente eines Vektorraums heißen **Vektoren**.
- Das neutrale Element 0 (der Addition) heißt der **Nullvektor** $\vec{0}$.
- Um deutlich zu machen, dass es sich um einen Vektor handelt, schreibt man oft einen Pfeil über den jeweiligen Bezeichner.
- Diese Schreibweise ist nicht zwingend erforderlich.
- Die Elemente des Körpers K nennen wir **Skalare**, da sie Vektoren skalieren.
- Für die Skalare verwenden wir hier normale Buchstaben wie t oder z.
- Die Vektorraumaxiome garantieren uns, dass wir beim Rechnen in einem Vektorraum immer im selben Raum bleiben.
- Somit können wir in einem Vektorraum stets problemlos rechnen.

Beispiele Vektorräume

- Schauen wir uns nun ein paar Beispiele für Vektorräume an:

Beispiel 10.1 Vektorräume

$$\mathbb{R}^3 := \left\{ \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \middle| v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

ist mit den Verknüpfungen aus Definition 10.1 ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Allgemein können wir uns so (für ein festes $n \in \mathbb{N}$) den Vektorraum $\mathbb{R}^n$ definieren:

$$\mathbb{R}^n := \left\{ \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \middle| v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R} \right\}$$

Damit haben wir die aus der Schule bekannten Vektorräume $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ also auch schon eingeführt.

- Diese Mengen erfüllen die Vektorraumaxiome aus Definition 10.1

Linearkombinationen

- Wir wollen uns nun die Begriffe der Linearkombination bzw. der linearen Abhängigkeit von Vektoren anschauen.

Definition 10.2 Linearkombination

Es seien $\vec{v_1}, \dots, \vec{v_n}$ Elemente eines Vektorraums V.Eine Summe der Form

$$t_1\vec{v_1} + t_2\vec{v_2} + \dots + t_n\vec{v_n}$$

heißt **Linearkombination** und die Zahlen $t_i \in R$ heißen **Koeffizienten** der Linearkombination.

Beispiel: Der Vektor $\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ ist eine Linearkombination der Vektoren

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit Koeffizienten 6, 4 und 2.

Lineare Abhängigkeit

Definition 10.3 Linear abhängig

Die Vektoren $\vec{v_1}, ..., \vec{v_n}$ des Vektorraums V heißen **linear abhängig**, wenn es Zahlen $t_1, ... + t_n \in \mathbb{R}$ gibt, die nicht alle Null sind, sodass für die folgende Linearkombination gilt:

$$t_1\vec{v_1} + t_2\vec{v_2} + ... + t_n\vec{v_n} = \vec{0}$$

Sie heißen **linear unabhängig**, wenn sie nicht linear abhängig sind.

Bemerkung 10.1

Die Vektoren $\vec{v_1}, ..., \vec{v_n}$ sind genau dann linear unabhängig, wenn die Gleichung

$$t_1\vec{v_1} + t_2\vec{v_2} + ... + t_n\vec{v_n} = \vec{0}$$

(mit den Unbekannten $t_1, ...t_n$) nur die folgende Lösung besitzt:

$$t_1 = ... = t_n = 0$$

Beispiele lineare Abhängigkeit

Beispiele:

1. Die Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ sind linear abhängig,denn es gilt $4\vec{u} + (-1)\vec{v} + (-2)\vec{w} = 0$
2. Die Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ sind linear unabhängig, denn $t\vec{v} + z\vec{w} = \vec{0}$ ist gleichbedeutend mit dem folgenden LGS:

$$\begin{aligned} t + 2z &= 0 \\ 2t + \ \ z &= 0 \end{aligned}$$

und dies hat die eindeutige Lösung $t = z = 0$

Bemerkungen zur linearen Abhängigkeit

Bemerkung 10.2 lineare Abhängigkeit

1. $\vec{v} \in V$ ist genau dann linear abhängig, wenn $\vec{v} = 0$
2. Die lineare Abhängigkeit zweier Vektoren $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ ist gleichbedeutend mit jeweils:
   a) $\vec{v}$ und $\vec{w}$ liegen auf einer Geraden durch den Nullpunkt, und
   b) je einer der Vektoren ist ein Vielfaches des anderen.
3. Die lineare Abhängigkeit dreier Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ ist gleichbedeutend mit jeweils
   a) $\vec{u}, \vec{v}$ und $\vec{w}$ liegen in einer Ebene durch den Nullpunkt, und
   b) mindestens einer der Vektoren ist eine Linearkombination der anderen beiden.

Skalarprodukt, Norm und Winkel

Definition 10.4 Skalarprodukt, Norm und Winkel

- Das **Skalarprodukt** zweier Vektoren $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ ist definiert durch
$$\vec{v} \cdot \vec{w} := v_1 w_1 + v_2 w_2 + ... + v_n w_n$$
- Die **Norm** (oder der Betrag bzw. Länge) eines Vektors ist definiert durch
$$||\vec{v}|| := \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + ... + v_n^2}$$
- Der **Winkel** $\alpha \in [0, \pi]$ zwischen zwei Vektoren $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$, wobei $\vec{v} \neq \vec{0} \neq \vec{w}$ gilt, ist definiert durch:
$$\cos\alpha = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{||\vec{v}|| \, ||\vec{w}||}$$

- Es gilt $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ genau dann, wenn $\vec{v}$ und $\vec{w}$ senkrecht aufeinander stehen.

Kreuzprodukt

Definition 10.5 Kreuzprodukt

Es seien $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Dann ist das **Kreuzprodukt** (oder **Vektorprodukt**) $\vec{v} \times \vec{w}$ definiert durch:

$$\vec{v} \times \vec{w} := \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}$$

- Es gilt $\vec{v} \times \vec{w} = \vec{0}$ genau dann, wenn $\vec{v}$ und $\vec{w}$ linear abhängig sind.
- $(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{v} = (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{w} = 0$.

$\rightarrow$ $\vec{v} \times \vec{w}$ steht sowohl senkrecht auf $\vec{v}$ als auch auf $\vec{w}$.

Ortsvektor, Richtungsvektor

Bemerkung 10.3 Ortsvektoren, Richtungsvektoren

- Im $\mathbb{R}^n$ unterscheidet man **Ortsvektoren** und **Richtungsvektoren**.
- Ortsvektoren entsprechen dabei festen Positionen im Raum.
- Sie "zeigen" sozusagen auf einen Punkt.
- Bsp.: Eckpunkte eines Dreiecks

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\vdots$

Ortsvektor, Richtungsvektor

Bemerkung 10.3 Ortsvektoren, Richtungsvektoren (Fortsetzung)

$\vdots$

- Richtungsvektoren könnte man als orientierte Strecken im Raum auffassen.
- Man kann den Richtungsvektor zwischen zwei Punkten im Raum erhalten, indem man den Ausgangspunkt vom Zielpunkt subtrahiert:

$$\vec{AB} = B - A = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quellen und Literatur

[1] Akad. Dir. Dr. Martin Scheer, Maximilian Sperber
„Mathematischer Vorkurs“.
TU Dortmund 2021.