

# 07 - Integrale

## Vorkurs Mathematik SoSe 2022

Lukas Mürmann

Fakultät Informatik - Lehrstuhl 7 - TU Dortmund

16.03.2022

# Integrale

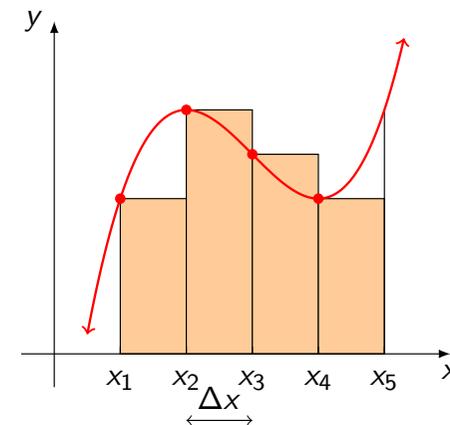
1 / 19

2 / 19

## Einleitung

## Riemann Summe

- Heute: Kurze Wiederholung von Integralen
- Fokus: Regeln der Integralrechnung
- Was sind Integrale und wofür werden sie gebraucht?
- Ursprüngliches Problem:
  - ▶ Wie bestimme ich den Flächeninhalt zwischen einem Funktionsgraphen und der x-Achse?
  - ▶ Einfach für lineare Funktionen (Rechteck + Dreieck)
  - ▶ Wie geht man jedoch bei z.B. kurvigen Verläufen vor?
  - ▶ Idee: Wie nähern uns mit Rechtecken dem wahren Flächeninhalt immer weiter an.



$$F = f(x_1) \cdot (x_2 - x_1) + f(x_2) \cdot (x_3 - x_2) + f(x_3) \cdot (x_4 - x_3) + f(x_4) \cdot \underbrace{(x_5 - x_4)}_{\Delta x}$$

3 / 19

4 / 19

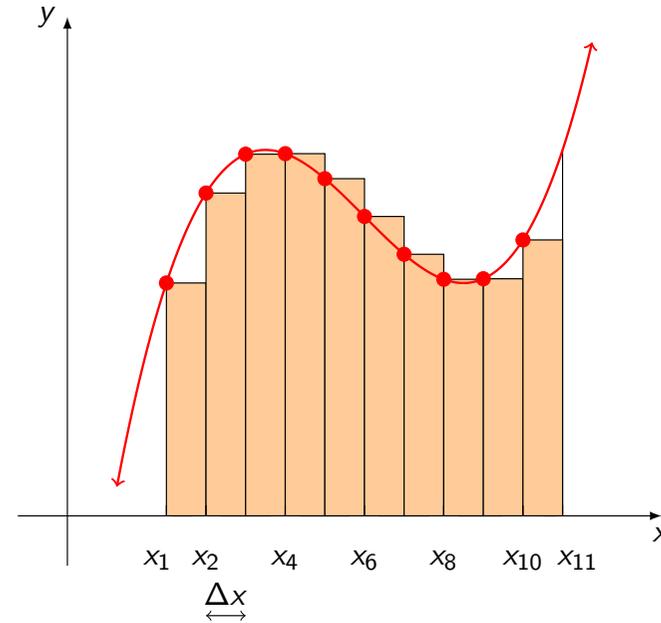
# Riemann Summe

$$F = f(x_1) \cdot (x_2 - x_1) + f(x_2) \cdot (x_3 - x_2) + f(x_3) \cdot (x_4 - x_3) + f(x_4) \cdot (x_5 - x_4)$$

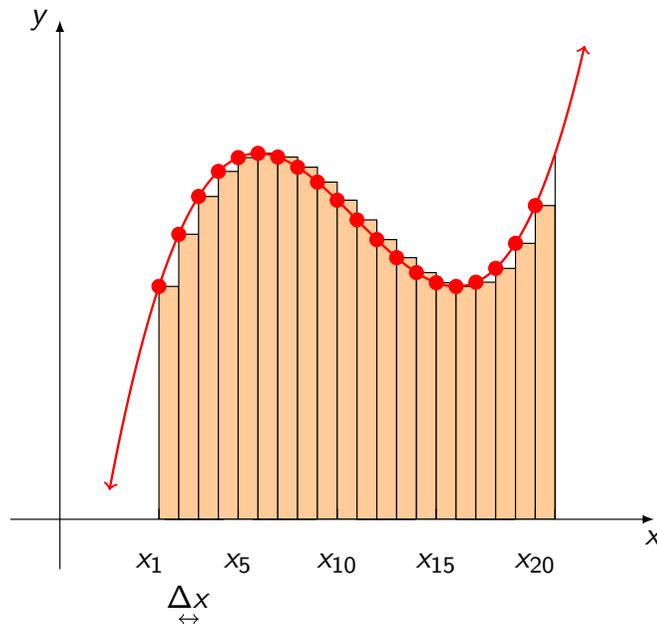
- Das können wir auch zusammenfassen:

$$S_4 = \sum_{j=1}^4 f(x_j) \cdot \underbrace{(x_{j+1} - x_j)}_{\Delta x}$$

- Wie erhalten wir nun den genauen Flächeninhalt?
  - Wir verwenden einfach immer mehr Rechtecke!



# Riemann Summe



# Riemann Integral

- Wir sehen also, wenn wir die Anzahl der Rechtecke ( $n$ ) schrittweise erhöhen, werden wir stets genauer.
- Wir nähern uns also immer weiter dem richtigen Flächeninhalt an.
- Gleichzeitig wird  $\Delta x$  immer kleiner.
- Für eine beliebige Anzahl an Rechtecken ergibt sich:

$$S_n = \sum_{j=1}^n f(x_j) \cdot \Delta x$$

- Wenn wir nun  $n$  unendlich erhöhen erhalten wir das sogenannte Integral von  $x_0$  bis  $x_n$  der Funktion  $f(x)$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx$$

# Riemann Integral

# Integrationsregeln

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx$$

- Das Integralzeichen ist also nur ein abgewandeltes Summenzeichen
- Das  $dx$  am Ende des Integrals repräsentiert das ursprüngliche  $\Delta x$ , welches nun "unendlich klein" ist.
- Das Ergebnis des Integrals (ungeachtet der Grenzen) ist die sogenannte **Stammfunktion**  $F(x)$  von  $f(x)$ .
- Wenn man diese ableitet erhält man wieder die ursprüngliche Funktion  $f(x)$ , also  $F(x)' = f(x)$ .

- Uns interessiert nun, wie wir für eine Funktion  $f(x)$  deren Stammfunktion herausfinden können.
- Dazu beschäftigen wir uns im Folgenden mit den Rechenregeln der Integration.
- Starten wir mit folgender Situation:
  - ▶ Wir haben eine Funktion  $f(x) = x^3$ , welche die Ableitung einer unbekanntes Funktion sein soll.
  - ▶ Wie wird die ursprüngliche Funktion ausgesehen haben?
  - ▶ Gesucht wird als die (Stamm-)Funktion  $F$  mit  $F'(x) = x^3$  ( $= f(x)$ )

9 / 19

10 / 19

## Stammfunktion von $f(x) = x^3$

## Stammfunktion von $f(x) = x^3$

### Beispiel 7.1

- Wir wissen, was bei der Differentialrechnung passiert:
  - ▶ Um nach der Ableitung auf  $x^3$  zu kommen, muss der Exponent vorher um 1 höher gewesen sein.
  - ▶ Also war der Exponent 4.
  - ▶  $F(x) = x^4$  passt aber nicht, denn dann hätten wir ja als Ableitung  $4x^3$ .
  - ▶ Denn beim Ableiten wird ja der "alte" Exponent als Faktor davor geschrieben.
  - ▶ Da bei  $x^3$  kein Faktor vorhanden ist, muss dieser Faktor 4 durch einen "neutralisierenden" Faktor bei  $F(x)$  ausgeglichen worden sein.
  - ▶ Also: "Alter Faktor" · "neuer Faktor" = 1
  - ▶ Wir erhalten somit:  $F(x) = \frac{1}{4} \cdot x^4$

### Beispiel 7.1 Fortsetzung

- Wir prüfen unser Ergebnis nach:

$$F'(x) = \left( \frac{1}{4} \cdot x^4 \right)' = 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot x^3 = x^3$$

- Sind wir nun Fertig? Noch nicht ganz! Denn es gibt noch mehr Funktionen mit dieser Eigenschaft z.B.

$$G(x) = \frac{1}{4} \cdot x^4 + 2$$

- Beim Ableiten fallen konstante Summanden ja weg!
- Die korrekte Angabe **aller** Lösungen unserer Aufgabe wäre:

$$F(x) = \frac{1}{4} \cdot x^4 + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

11 / 19

12 / 19

## Integration von Monomen

### Bemerkung 7.1

Für  $n \in \mathbb{Q}$  gilt:

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

- **Hinweis:** Generell gilt beim Integrieren die Vereinbarung, dass wir das  $+c$  immer erst ganz am Schluss unserer Rechnung hinschreiben.
- Diese Vereinbarung macht das Rechnen übersichtlicher.
- Eigentlich müsste man das  $+c$  immer sofort nach der Auflösung des Integrals ergänzen

13 / 19

## Integration bei Summen und Faktoren

- Wie verfahren wir bei Summen?

### Bemerkung 7.2 Summenregel

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

- Analog zur Differentialrechnung dürfen wir also auch summandenweise integrieren.
- Was passiert mit konstanten Faktoren?

### Satz 7.1 Faktoren bei Integralen

Für  $a \in \mathbb{R}$  gilt:

$$\int a \cdot f(x) dx = a \cdot \int f(x) dx$$

14 / 19

## Partielle Integration

- Wie können wir Produkte von Funktionen integrieren?

### Satz 7.2 Partielle Integration

$$\int f'(x) \cdot g(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)$$

### Bemerkung 7.3

- Es ist hilfreich, wenn man hierbei alle benötigten Formel-Elemente einzeln hinschreibt, z.B.

$$\int \cos(x) \cdot x dx = ?$$

$$\begin{array}{ll} f' = \cos(x) & f = \sin(x) \\ g = x & g' = 1 \end{array}$$

15 / 19

## Partielle Integration

### Satz 7.2 Partielle Integration

$$\int f'(x) \cdot g(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)$$

- Bei Aufgaben steht natürlich nie dabei, welche der beiden Funktionen als  $f'$  (zu integrieren) und welche als  $g$  (abzuleiten) zu wählen ist.
- Sinnvolles Vorgehen:
  - ▶ Wähle  $f'$  so, dass es beim Integrieren nicht "schwieriger" wird.
  - ▶ Wähle  $g$  so, dass diese Funktion beim Ableiten vereinfacht wird.
  - ▶ Polynome sind meist eine sehr gute Wahl für  $g$ .

16 / 19

## Integration durch Substitution

- Analog zur Kettenregel der Differentialrechnung funktioniert die **Integration durch Substitution**.
- Mit ihr können wir verkettete Funktionen integrieren.

### Satz 7.3 Integration durch Substitution

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(t) dt$$

- Von links nach rechts:
  - ▶ Die "innere Funktion"  $g(x)$  ist ersetzt worden durch  $t$ .
  - ▶  $dx$  ist zu  $dt$  geworden.
  - ▶ Der  $g'(x)$ -Teil ist ganz verschwunden.

17 / 19

## Quellen und Literatur

- [1] Akad. Dir. Dr. Martin Scheer, Maximilian Sperber  
„Mathematischer Vorkurs“.  
TU Dortmund 2021.

19 / 19

## Integration durch Substitution

### Satz 7.3 Integration durch Substitution

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(t) dt$$

- Schritte, die wir bei der Integration durch Substitution durchlaufen:
  - ▶ Bestimme die "innere Funktion"  $g(x)$  und substituiere  $g(x) = t$ .
  - ▶ Bildere  $g'(x)$ , setze  $g'(x) = \frac{dt}{dx}$  und stelle um nach  $dx$ .
  - ▶ Alles einsetzen und dann das Integral berechnen.
  - ▶ Rücksubstitution

18 / 19