05 - Ableitungen

Vorkurs Mathematik SoSe 2022

Lukas Mürmann

Fakultät Informatik - Lehrstuhl 7 - TU Dortmund

14.03.2022

Ableitungen

Differenzierbarkeit

- Was ist die Ableitung einer Funktion/Abbildung?
- Zur Klärung dieser Frage müssten wir uns erst einmal mit dem Begriff der Differenzierbarkeit auseinandersetzen:
  - Was bedeutet differenzierbar?
  - Es existiert $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$
  - Die obige Formel nennt man auch den Differentialquotienten von f.
  - Dieser existiert übrigens nur für Funktionen auf den reellen bzw. komplexen Zahlen (ein- oder mehrdimensional).
  - Für das genaue Verständnis benötigen wir u.a. Grundlagen über Grenzwerte und Stetigkeit.
  - Mehr dazu in MafI 2
- Heute: Wiederholung der Ableitungsregeln aus der Schule!

Die Ableitungsregeln

- Welche Ableitungsregeln kennt Ihr noch aus der Schule?
  - Summenregel
  - Produktregel
  - Quotientenregel
  - Kettenregel
- Wir setzen bei den heute behandelten Funktionen deren Differenzierbarkeit voraus.
- Auf die zu beachtenden Formalitäten (wie ist die Funktion differenzierbar?) werden wir nicht weiter eingehen.
- Der Fokus liegt heute auf den reinen Rechenregeln.

Ableiten von Monomen

- Starten wir mit dem Ableiten eines **Monoms** (z.B. x^3).
- Ein Monom wird abgeleitet, indem man:
  - Mit dem ursprünglichen Exponenten multipliziert
  - und anschließend den Exponenten um eins erniedrigt, hier also:

$$(x^3)' = 3 \cdot x^{3-1} = 3 \cdot x^2$$

  - Ein Beispiel mit negativem Exponenten:

$$(x^{-2})' = (-2) \cdot x^{-2-1} = (-2) \cdot x^{-3} = \frac{-2}{x^3}$$

Bemerkung 5.1 Monome

- Für $n \in \mathbb{Q}$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

Ableiten von Polynomen

- Betrachten wir als nächstes ein sehr einfaches **Polynom**, also eine Summe von Monomen.
- Dieses leiten wir mithilfe der sogenannten Summenregel ab.
- Diese besagt, dass man Summen ableitet, indem man jeweils die einzelnen Summanden ableitet:

Beispiel 5.1 Ableiten von $(x^3 + x^2)$

$$(x^3 + x^2)' = (x^3)' + (x^2)' = 3x^2 + 2x$$

- Allgemein lautet die Summenregel:

Satz 5.1 Summenregel

Für zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ gilt:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

Ableiten mit Koeffizienten

- Wie geht man mit konstanten Faktoren vor einer abzuleitenden Funktion um?

Beispiel 5.2 Ableiten von $4x^3$

Wie man x^3 ableitet ist uns nun bekannt. Der konstante Faktor 4 wird hier beim Ableiten einfach mitgezogen:

$$(4 \cdot x^3)' = 4 \cdot (x^3)' = 4 \cdot 3 \cdot x^2 = 12x^2$$

- Allgemein wird dies als sogenannte **Faktorregel** aufgefasst:

Bemerkung 5.2 Faktorregel

Für eine Funktion $f(x)$ und $a \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x)$$

Übung: Ableitung von Polynomen bilden

- Nun können wir Polynome ableiten!
- Das üben wir nochmal kurz.
- Gesucht sind die Ableitungen von:
  1. $f_1(x) = -x^2 + 4x - 3$
  2. $f_2(x) = 2x^{13} + 3x^4 - 3x^2 + 14x$
  3. $f_3(x) = 5x^{-2} + 3x$
- Lösungen:
  1. $f_1'(x) = -2x + 4$
  2. $f_2'(x) = 26x^{12} + 12x^3 - 6x + 14$
  3. $f_3'(x) = \frac{-10}{x^3} + 3$

Produktregel

- Wir wissen also, wie wir Summen von Funktionen ableiten können.
- Aber wie sieht es mit Produkten bzw. Quotienten von Funktionen aus?

Satz 5.2 Produktregel

Für das Produkt aus zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ gilt:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Übersichtlicher als Merkregel ohne Argumente der Funktionen:

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

Beispiel Produktregel

Beispiel 5.3 Ableiten von $(2x^2 \cdot 4x^3)$

Wir könnten das einfach ausmultiplizieren und dann ableiten, aber wir wollen hier die Produktregel nutzen:

$$(\underbrace{2x^2}_{f} \cdot \underbrace{4x^3}_{g})' = \underbrace{4x}_{f'} \cdot \underbrace{4x^3}_{g} + \underbrace{2x^2}_{f} \cdot \underbrace{12x^2}_{g'} = 16x^4 + 24x^4 = 40x^4$$

- Sinnvoller ist die Produktregel z.B. bei folgenden Typen von Ableitungen:

$$(2x^2 \cdot \sin(x))' = ?$$

- Hier kann man auch nicht mehr einfach ausmultiplizieren. Mit der Produktregel ergibt sich:

$$(\underbrace{2x^2}_{f} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{g})' = \underbrace{4x}_{f'} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{g} + \underbrace{2x^2}_{f} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{g'} = 2x \cdot (2\sin(x) + x \cdot cos(x))$$

Quotientenregel

Satz 5.3 Quotientenregel

- Für zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ mit $g(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

- Hier wieder übersichtlicher als Merkregel ohne Argumente der Funktionen:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

Ableiten mit der Quotientenregel

Beispiel 5.4

Betrachten wir nun die Ableitung des Quotienten der zwei Funktionen $f(x) = x^3$ und $g(x) = 2x^2 - 8$, wobei wir $\{-2, 2\}$, also die Nullstellen von $g(x)$, ausschließen:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(\frac{x^3}{2x^2 - 8}\right)' = \frac{\overbrace{(3x^2)}^{f'} \cdot \overbrace{(2x^2 - 8)}^{g} - \overbrace{(\ x^3\ )}^{f} \cdot \overbrace{(4x^1)}^{g'}}{\underbrace{(2x^2 - 8)^2}_{g^2}}$$

$$= \frac{6x^4 - 24x^2 - 4x^4}{(2x^2 - 8)^2} = \frac{2x^4 - 24x^2}{(2x^2 - 8)^2}$$

Kettenregel Teil 1

- Die **Kettenregel** ermöglicht es, die Ableitung von Verkettungen von Funktionen zu berechnen.
- Um diese Regel anwenden zu können, müssen wir erst klären, was eine **Verkettung von Funktionen** eigentlich ist.
- Sehen wir uns dazu ein Beispiel an:

$$f(x) = \sin(2x + 3)$$

  - f ist eine verkettete Funktion, bestehend aus der **Hintereinanderausführung** der Funktionen:
  - $f_1 : x \mapsto 2x + 3$ und $f_2 : x \mapsto \sin x$.
  - Mathematisch: $f(x) = f_2(f_1(x)) = (f_2 \circ f_1)(x)$
  - Das Verkettungssymbol ($\circ$) wird gelesen als "nach".
  - **Achtung:** Hier wird von rechts nach links gearbeitet.
  - Erst das, was nahe am x steht anwenden und dann weiter.

Kettenregel Teil 2

- Bei einer verketteten Funktion $(f(g(x))$ muss der Wertebereich von g im Definitionsbereich von f enthalten sein.
- Ansonsten können die beiden Funktion nicht hintereinander ausgeführt werden.

Satz 5.4 Kettenregel

Für die Verkettung zweier Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ gilt:

$$(f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

- Eine gute Merkregel dabei ist: „**Äußere mal innere Ableitung**“
- Hier im Satz ist $f'(g(x))$ die äußere Ableitung und $g'(x)$ die innere Ableitung.

Ableiten mit der Kettenregel

Beispiel 5.5

Berechnen wir mithilfe der Kettenregel die Ableitung der Funktion $(\sin(x)+1)^3$:

$$\left((\sin(x)+1)^3\right)' = \underbrace{3\cdot(\sin(x)+1)^2}_{f'(g(x))}\cdot\underbrace{\cos x}_{g'(x)}$$

Quellen und Literatur

[1] Akad. Dir. Dr. Martin Scheer, Maximilian Sperber
„Mathematischer Vorkurs“.
TU Dortmund 2021.